Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 *- Prof. D. Pasetto*

27/08/2020 - Tema A;

Tempo a disposizione: 2h 20min + 10 min (consegna online)

Norme generali:

- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame. La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. Per Calcolo 2 è permesso utilizzare un foglio A4 con degli appunti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio. Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a pochi minuti dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 - *Prof. D. Pasetto*

27/08/2020 - Tema A;

Tempo a disposizione: 2h 20min + 10 min(consegna online)

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $16y'' + y = \mathrm{e}^3 + 8y' + \log(2)\sin(x/2)$

1.2 Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Determinarne il dominio di esistenza.

Problema 2 (7 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla funzione parametrica $r(t) = \left(\sqrt{26 - t^2}, \log\left(26 - t^2\right)\right)$, $t \in [-5, 0]$

2.1 Determinare se γ è chiusa, semplice e regolare.

2.2 Determinare il supporto della curva e disegnarlo. Indicare il verso di percorrenza.

2.3 Scrivere un'equazione parametrica e cartesiana della retta tangente a γ in $t_0 = -5$.

2.4 Sia $f(x, y) = (x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}}$. Verificare che il sostegno della curva γ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma f$.

Problema 3 (9 punti)

Sia $f(x, y) = x^2 + \log\left(4 - x^2 - 4y^2\right)$.

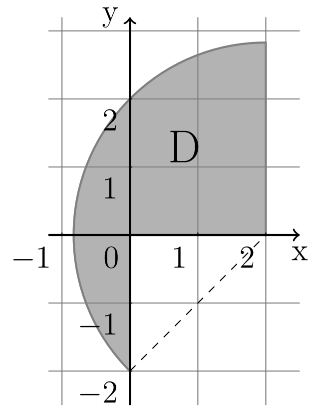
3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $x = 0$ e $y = 0$.

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(\sqrt{3}, 0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

Problema 4 (7 punti)

Calcolare l'area e il baricentro del dominio D rappresentato in figura (la curva alla frontiera di D è un arco di circonferenza di centro $(2, 0)$ e raggio $2\sqrt{2}$).



Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 - *Prof. D. Pasetto*

23/06/2020 - Tema A;

Tempo a disposizione: 140 min + 10 (consegna online)

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione

$$16y'' + y = e^3 + 8y' + \log(2)\sin(x/2)$$

(2 Punti) L'equazione differenziale ordinaria è lineare del secondo ordine. L'equazione omogenea associata è:

$$16z'' - 8z' + z = 0$$

Il polinomio caratteristico è $16\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0$, che ha una radice doppia, $\lambda = 1/4$. Quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono:

$$z = Ae^{\frac{1}{4}x} + Bxe^{\frac{1}{4}x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(3 Punti)La soluzione particolare va cercata nella forma

$$\bar{y} = c_1 \sin(x/2) + c_2 \cos(x/2) + c_3$$

Si ha

$$\bar{y}' = \frac{1}{2}c_1\cos(x/2) - \frac{1}{2}c_2\sin(x/2)$$
$$\bar{y}'' = -\frac{1}{4}\bar{y}$$

Sostituendo si ottiene:

$-4c_1\sin(x/2) - 4c_2\cos(x/2) - 4c_1\cos(x/2) + 4c_2\sin(x/2) + c_1\sin(x/2) + c_2\cos(x_2) + c_3 = e^3 + \log(2)\sin(x/2)$

da cui:

$$\begin{cases} -3c_1 + 4c_2 = \log(2) \\ -4c_1 - 3c_2 = 0 \\ c_3 = e^3 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = -\frac{3}{25}\log(2) \\ c_2 = \frac{4}{25}\log(2) \\ c_3 = e^3 \end{cases}$$

Per cui le soluzioni dell'equazione differenziale sono:

$$y(x) = Ae^{\frac{1}{4}x} + Bxe^{\frac{1}{4}x} - \frac{3}{25}\log(2)\sin(x/2) + \frac{4}{25}\log(2)\cos(x/2) + e^3, \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

1.2 (2 punti) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Determinarne il dominio di esistenza.

Bisogna imporre le condizioni iniziali:

$$A + \frac{4}{25}\log(2) + e^3 = 0,$$
$$\frac{1}{4}A + B - \frac{3}{50}\log(2) = 0$$

Quindi $A = -\frac{4}{25}\log(2) - e^3$, $B = \frac{1}{10}\log(2) + \frac{e^3}{4}$

Il dominio è $\mathbb{R}$.

Problema 2 (7 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla funzione parametrica

$$r(t) = \left(\sqrt{26 - t^2}, \log\left(26 - t^2\right)\right), \quad t \in [-5, 0]$$

dove il logaritmo è in base naturale.

2.1 Determinare se γ è chiusa, semplice e regolare.

(2 punti) Si vede immediatamente che $r(-5) = (1, 0)$ e $r(0) = (\sqrt{26}, \log(26))$. Quindi γ non è chiusa.

Per la semplicità, se $r(t_1) = r(t_2)$, allora deve essere $t_1 = t_2$ oppure $t_1 = -t_2$. La seconda condizione non si verifica nel dominio ($t \in [-5, 0]$), quindi deve essere $t_1 = t_2$ e la curva è semplice.

Per la regolarità bisogna calcolare il vettore tangente e la sua norma:

$$r'(t) = (-t(26 - t^2)^{-\frac{1}{2}}, \frac{-2t}{26 - t^2})$$

Il vettore tangente si annulla in $t = 0$, quindi $r(t)$ non è regolare. $r(t)$ è regolare in $[-5, 0[$ (regolare a tratti).

2.2 Determinare il supporto della curva e disegnarlo. Indicare il verso di percorrenza.

(1 punti) Dalla prima equazione si ottiene $x = \sqrt{26 - t^2}$. Sostituendo nella seconda si ha che il supporto è dato dal grafico della funzione

$y = \log(x^2)$ con $x \in [1, \sqrt{26}]$.

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = -5$.

(2 punti)

Si ha $\mathbf{r}(-5) = (1, 0)$ e $r'(-5) = (5, 10)$. Quindi un'eq. della retta tangente è:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 5(t + 5), & t \in \mathbb{R} \\ y(t) = 10(t + 5) \end{cases}$$

L'equazione cartesiana è $y = 2x - 2$.

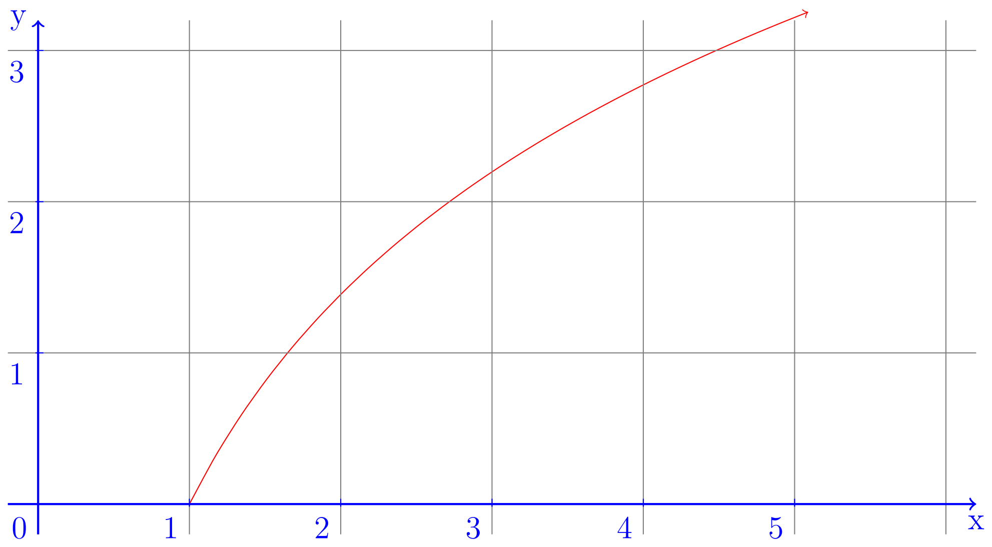


Figura 1: Supporto della curva parametrica

2.4 Sia
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$$
Verificare che il sostegno della curva γ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma f$.

(2 punti) Il dominio di f è $\mathbb{R}^2$, quindi il supporto di γ è contenuto nel dominio. Si ha inoltre:
$$f(r(t)) = \frac{1}{\sqrt{30-t^2}}$$
e
$$\|r'(t)\| = |\frac{t}{26-t^2}|\sqrt{30-t^2}$$
Quindi
$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_{-5}^{0} f(r(t))\|r'(t)\|\,dt = \\ &= \int_{-5}^{0} |\frac{t}{26-t^2}|\,dt = \\ &= \int_{-5}^{0} -\frac{t}{26-t^2}\,dt = \\ &= \left[\frac{1}{2}\log(26-t^2)\right]_{-5}^{0} = \\ &= \frac{1}{2}\log(26)\end{aligned}$$

Problema 3 (9 punti)

Sia $f(x, y) = x^2 + \log(4 - x^2 - 4y^2)$

3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $x = 0$ e $y = 0$.

(3 punti) Il dominio di f è $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$ (regione di piano interna all'ellisse di centro l'origine e semiassi $a = 2$, $b = 1$). La funzione è $\mathcal{C}^2(D_f)$ perché somma, e composizione di funzioni di classe $\mathcal{C}^2$ (anche $\mathcal{C}^\infty$).

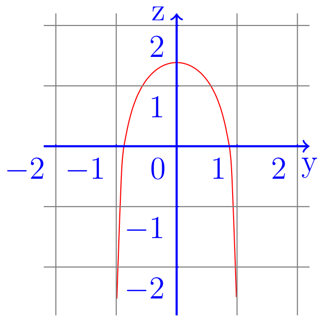


Figura 2: Sezione $x = 0$, $z = \log(4 - 4y^2)$

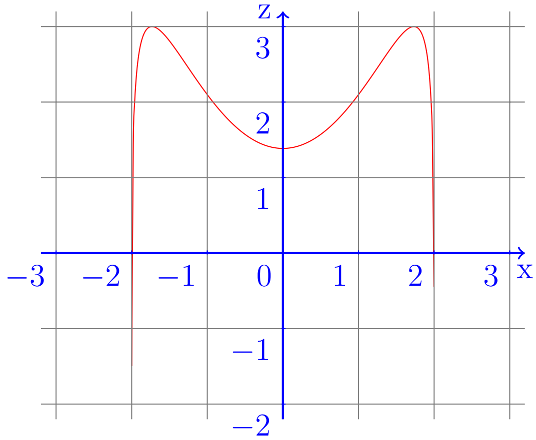


Figura 3: Sezione $y = 0$, $z = x^2 + \log(4 - x^2)$

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

(4 punti) Il gradiente di f è:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - \frac{2x}{4-x^2-4y^2} \\ -\frac{8y}{4-x^2-4y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2x^3-8xy^2+6x}{4-x^2-4y^2} \\ -\frac{8y}{4-x^2-4y^2} \end{pmatrix}$$

Imponendo $\nabla f(x, y) = 0$ si ottiene dalla seconda equazione $y = 0$. Sostituendo nella prima equazione si ha la condizione:

$$2x(3 - x^2) = 0$$

che è soddisfatta per $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$. I punti critici quindi sono:

$$P_1 = (0,0) \quad , \quad P_2 = (\sqrt{3},0) \quad , \quad P_3 = (-\sqrt{3},0)$$

Si noti che tutti e tre i punti appartengono al dominio!

Si usa il test della matrice Hessiana per caratterizzare tali punti. In un punto (x,y) la matrice Hessiana H_f è:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{8+2x^2-8y^2}{(4-x^2-4y^2)^2} & -\frac{16xy}{(4-x^2-4y^2)^2} \\ -\frac{16xy}{(4-x^2-4y^2)^2} & -\frac{32-8x^2+32y^2}{(4-x^2-4y^2)^2} \end{pmatrix}$$

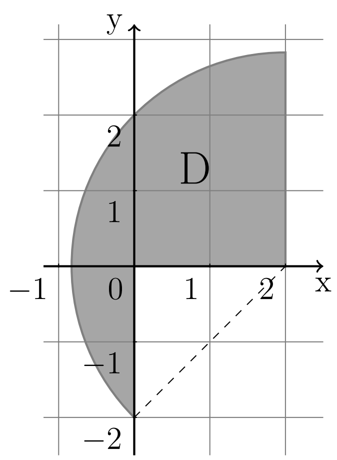
- P_1: $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\det(H_f(0,1)) = -3$ quindi H_f è indefinita in P_1 e P_1 è punto di sella.
- P_2: $H_f(\sqrt{3},0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $\det(H_f(0,-1)) = 96$ e il primo termine di $H_f(\sqrt{3},0)$ vale $-12 < 0$, quindi H_f è definita negativa in P_2 e P_2 è massimo locale.
- P_3: stessi conti di P_2, quindi P_3 è punto di massimo locale.

3.3 (2 punti) Determinare il versore di massima crescita nel punto $(\sqrt{3},0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

Il punto $(\sqrt{3},0)$ è un punto critico. Il versore di massima crescita non è definito in tale punto, in quanto $\nabla f(\sqrt{3},0) = (0,0)$ che ha norma 0. Se si prova a normalizzare il gradiente per la sua norma, viene una divisione per 0 che è impossibile.

Il piano tangente è un piano orizzontale, parallelo al piano xy, che ha equazione $z = f(\sqrt{3},0) = 3$.

Problema 4 (7 punti)



4.1 Calcolare l'area e il baricentro del dominio D rappresentato in figura (la curva alla frontiera di D è un arco di circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio $2\sqrt{2}$).

Il dominio D si può pensare come $D = D_1 \setminus D_2$ con:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \rho\cos(\theta) + 2, y = \rho\sin(\theta),\ \frac{pi}{2} \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi, 0 \leq \rho \leq 2\sqrt{2}\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x-2 \leq y \leq 0\}$$

Quindi $\int\int_D dx\,dy = \int\int_{D_1} dx\,dy - \int\int_{D_2} dx\,dy$.

$$\int\int_{D_1} dx\,dy = \int_{\pi/2}^{5\pi/4}\left(\int_0^{2\sqrt{2}} \rho\,d\rho\right) d\theta = \frac{3}{4}\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{2\sqrt{2}} = 3\pi$$

$$\int\int_{D_2} dx\,dy = \int_0^2\left(\int_{x-2}^0 1\,dy\right) dx = 2$$

Quindi l'area di D vale $3\pi - 2$ (dominio corretto+ area, 3 punti).

Per il calcolo del baricentro si calcolano $\int\int_D x\,dx\,dy$ e $\int\int_D y\,dx\,dy$:

Coordinata x_c:

$$\int\int_{D_1} x\,dx\,dy = \int_{\pi/2}^{5\pi/4}\left(\int_0^{2\sqrt{2}} \rho^2\cos(\theta) + 2\rho\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \left(\int_{\pi/2}^{5\pi/4}\cos(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^2\,d\rho\right) + \left(\int_{\pi/2}^{5\pi/4} d\theta\right)\left(\int_0^{2\sqrt{2}} 2\rho\,d\rho\right) =$$

$$= [\sin(\theta)]_{\pi/2}^{5\pi/4}\left[\rho^3/3\right]_0^{2\sqrt{2}} + \frac{3}{4}\pi\left[\rho^2\right]_0^{2\sqrt{2}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\frac{16\sqrt{2}}{3} + 6\pi = 6\pi - \frac{16}{3} - \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

$$\int\int_{D_2} x\,dx\,dy = \int_0^2\left(\int_{x-2}^0 x\,dy\right) dx =$$

$$= \int_0^2 x\,[y]_{x-2}^0\,dx = \int_0^2 x(-x+2)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

Quindi la coordinata x del baricentro è (2 punti): $x_C = \frac{(6\pi - \frac{16}{3} - \frac{16}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3})}{3\pi - 2} = \frac{18\pi - 20 + 16\sqrt{2}}{9\pi - 6} \approx 0.625$

Coordinata y_c:

$$\int\int_{D_1} y\,dx\,dy = \int_{\pi/2}^{5\pi/4}\left(\int_0^{2\sqrt{2}} \rho^2\sin(\theta)\,d\rho\right) d\theta =$$

$$= \left(\int_{\pi/2}^{5\pi/4}\sin(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^2\,d\rho\right) =$$

$$= [-\cos(\theta)]_{\pi/2}^{5\pi/4}\left[\rho^3/3\right]_0^{2\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{16\sqrt{2}}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\int\int_{D_2} y\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{x-2}^0 y\,dy\right) dx =$$
$$= \int_0^2 \left[y^2/2\right]_{x-2}^0 dx = -\int_0^2 \frac{x^2-4x+4}{2}\,dx =$$
$$= -\left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x\right]_0^2 = -\frac{4}{3}$$

Quindi la coordinata y del baricentro è (2 punti): $x_C = \frac{\frac{16}{3}+\frac{4}{3}}{3\pi-2} = \frac{20}{9\pi-6} \approx 0.898$